

Stima & Identificazione

Esercitazione del 4 Giugno 2010

Problema 1 - Si consideri il processo scalare y_t definito da

$$\begin{aligned} y_t &= F(z)w_t + v_t \\ w_t &\sim wn(0, q), q > 0 \\ v_t &\sim wn(0, r), r > 0 \end{aligned} \quad (1)$$

dove $F(z)$ è una funzione razionale con poli in $|z| < 1$, e sia $(A, C, D, 0)$ una realizzazione della funzione di trasferimento $F(z)$, cioè $F(z) = C(zI - A)^{-1}D$. Dimostrare che il predittore MMSE a T passi del processo y_t è dato da

$$\hat{y}_{t+T|t} = \hat{G}_T(z)y_t, \text{ con } \hat{G}(z) = zCA^{T-1}(zI - A + KC)^{-1}K$$

dove $K = APC'(R + CPC')^{-1}$ e P è l'unica soluzione positiva definita dell'equazione algebrica di Riccati

$$P = APA' - APC'(r + CPC')^{-1}CPA' + qDD'$$

Problema 2 - Si consideri di nuovo il processo definito da (1). Dimostrare che la fattorizzazione spettrale canonica $\Phi_y(z) = H(z)H(z^{-1})\sigma_e^2$ del processo y_t può essere ottenuta nel seguente modo

$$H(z) = C(zI - A)^{-1}K + 1, \quad \sigma_e^2 = r + CPC'$$

dove K e P sono rispettivamente il guadagno e la matrice di covarianza del predittore di Kalman stazionario, definiti nel problema 1.

Problema 3 - Si consideri il segnale

$$y_t = s_t + v_t, \quad v_t \sim wn(0, r), \quad r > 0$$

e si assuma $\Phi_s(z) = H_s(z)H_s(z^{-1})q$ con $H_s(z) = C(zI - A)^{-1}D$. Verificare che il filtro ottimo MMSE causale che stima s_t sulla base di y^t è dato da

$$\hat{s}_{t|t} = \hat{G}_f(z)y_t \quad \text{con} \quad \hat{G}_f(z) = C(I - LC)(zI - A + KC)^{-1}K + CL$$

dove L e K sono i guadagni del filtro e del predittore di Kalman stazionari associati al modello di Gauss-Markov di matrici (A, C, D, q, r) .

Problema 4 - Si consideri il problema di deconvoluzione (stima causale di u_t sulla base di y_t):

$$\begin{aligned} y_t &= F(z)u_t + v_t, \quad v_t \sim wn(0, r), \quad r > 0 \\ u_t &= H_u(z)w_t, \quad w_t \sim wn(0, q), \quad q > 0 \end{aligned}$$

Far vedere come, introducendo realizzazioni di stato $F(z) = C_F(zI - A_F)^{-1}D_F$ e $H_u(z) = 1 + C_u(zI - A_u)^{-1}D_u$ delle f.d.t. $F(z)$ e $H_u(z)$ si possa ricondurre il problema di deconvoluzione ad un problema

di stima dello stato per un opportuno sistema.

Problema 5 - Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{a + be^{-x}}{1 + ce^{-x}}$$

Assumendo di avere N misure rumorose $y_i = f(x_i) + v_i$ per N valori noti x_i ($i = 1, 2, \dots, N$) della variabile x , si dica come si può procedere alla stima dei parametri incogniti a, b, c .